О наилучшем приближении дифференцируемых непериодических функций многочленами.[1]

С. М. НИКОЛЬСКИЙ (Москва).

§ I.

Функции, имеющие разрывные производные с достаточно регулярными разрывами, обладают тем замечательным свойством, что для их наилучшего приближения при помощи многочленов данной степени можно установить не только порядок убывания, но и асимптотическое поведение.

Впервые это обстоятельство в простейших важных случаях было обнаружено С. Н. БЕРНШТЕЙНом. В своих работах [2, 3] он показал, что для наилучшего приближения $E_n(|x|^s)$[2] $(s=1, 2, \ldots)$ функции $|x|^s$ на отрезке $(-1,+1)$ при помощи многочленов $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ степени n существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^s E_n(|x|^s) = \mu(s), \tag{1.1}$$

т. е. имеет место асимптотическое равенство

$$E_n(|x|^s) \approx \frac{\mu(s)}{n^s} \qquad (n\to\infty).$$

В дальнейшем С. Н. БЕРНШТЕЙН обобщил этот результат, показав, что, если определенная на отрезке $(-1,+1)$ функция $f(x)$ может быть записана в виде

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m} a_k |x-x_k|^s + \varphi(x) \tag{1.2}$$

где m конечно, точки x_k $(k=1,\ldots,m)$ принадлежат к отрезку $(-1,+1)$, а функция $\varphi(x)$ имеет всюду на этом отрезке непрерывную производную порядка s, то

---

[1] Краткие сообщения о результатах этой статьи были опубликованы в моих заметках [8, 9, 11, 12].

[2] Здесь и в дальнейшем $E_n(f)$, как обычно, обозначает наименьший максимум $\max\limits_{-1\le x\le 1} |f(x)-P_n(x)|$ при варьировании всевозможными многочленами степени n.

(1. 3) $$E_n(f) \approx \frac{\varkappa \mu(s)}{n^s} \qquad (n \to \infty),$$

где

(1. 4) $$\varkappa = \max_{1 \leq k \leq m} |a_k| (1-a_k^2)^{s/2}.$$

Но можно высказать по этому поводу общее утверждение, относящееся к более обширному классу функций.

Именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть s — нечетное число и функция $f(x)$ имеет на сегменте $-1 \leq x \leq 1$ (абсолютно непрерывную) производную порядка $s-1$, являющуся, в свою очередь, неопределенным интегралом от функции $\varphi(x) = f^{(s)}(x)$ со следующими свойствами:*

1) *$\varphi(x)$ конечна на сегменте $-1 \leq x \leq 1$ и имеет разрывы только первого рода;*

2) *$\varphi(x)$ имеет по меньшей мере один существенний разрыв в некоторой точке x_* интервала $-1 < x < 1$* $(\varphi(x_*+0) \neq \varphi(x_*-0))$.

Тогда

(1. 5) $$E_n(f) \approx \frac{\varkappa \mu(s)}{2s!\, n^s} \qquad (n \to \infty),$$

где

(1. 6) $$\varkappa = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\varphi(x+0) - \varphi(x-0)| (1-x^2)^{s/2},$$

а $\mu(s)$ определяется при помощи (1. 1).

Доказательству этой теоремы посвящается § 2 настоящей работы. Краткое сообщение о ней было опубликовано в 1947 г. в моей заметке **[8]**.

Совершенно аналогичная теорема естественно имеет место и в случае четного s. Разница заключается в том, что вместо $\mu(s)$ в равенстве (1. 5) нужно поставить константу

$$\nu(s) = \lim_{n \to \infty} n^s E_n(x|x|^{s-1}),$$

связанную с наилучшим приближением функции $x|x|^{s-1}$. *)

Отметим, что с помощью теоремы 1 выделяется сравнительно обширный класс дифференцируемых s-раз Функций f, наилучшие приближения $E_n(f)$ которых не только оцениваются сверху с помощью неравенства Джексона, но и снизу

$$\frac{C_1}{n^s} < E_n(f) < \frac{C_2}{n^s} \qquad (0 < C_1 < C_2).$$

В § 3 аналогичный вопрос рассматривается в метрике (L) — пространства суммируемых функций и доказывается теорема 2, являющаяся аналогом теоремы 1. В этом случае оказывается естественним рассматривать функции

*) Ряд исследований о $E_n(|x|x^s)$ принадлежит И. И. Ибрагимову, см. *Известия Академии Наук СССР*, сер. мат. **10** (1946), стр. 429—460.

$f(x)$, имеющие на отрезке $(-1,+1)$ производную $f^{(s)}(x)$ порядка s ограниченной вариации, вместо предположения, что $f^{(s)}(x)$ имеет разрывы первого рода.

Наконец, в § 4 нас интересует другая задача, решение которой впрочем связано с применением аппарата, уротребленного в предыдущих параграфах.

Именно, мы предлагаем линейный метод приближения функций $f(x)$, имеющих производную $f^{(s-1)}(x)=\varphi(x)$ порядка $s-1$ ограниченной вариации, с вариацией на $(-1,+1)$ не превышающей единицу, являющийся для этого класса функций в известном смысле (в метрике L) наилучшим.

Этим самым мы получаем в непериодическим случае результаты, подобние известным результатам Н. И. АХИЕЗЕРа и М. Г. КРЕЙНа [1], J. FAVARD'a [5], B. SZ.-NAGY [6] и моим [7], относящимся к периодическому случаю. На вопросе о наилучшем линейном методе в непериодическом случае в равномерной метрике (C) мы здесь останавливаться не будем.

§ 2.

Доказательство теоремы 1. Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $(-1,+1)$, имеет на нем абсолютно непрерывную производную порядка $s-1$, которая в свою очередь есть неопределенный интеграл от функции $\varphi(x)=f^{(s)}(x)$, имеющей на замкнутом отрезке $(-1,+1)$ разрывы первого рода. В таком случае функция $\varphi(x)$ органичена на $(-1,+1)$ и существует самое большее счетное число точек $a_1, a_2, a_3, \ldots$, принадлежащих к интервалу $-1<x<1$, где $\varphi(x)$ терпит разрывы.

Воспользовавшись формулой Тейлора, с остатком в интегральном виде, представим функцию $f(x)$ следующим образом

$$f(x)=P_{s-1}(x)+\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}\varphi(t)\,dt, \tag{2.1}$$

где

$$P_{s-1}(x)=\sum_{k=1}^{s-1}\frac{f^{(k)}(-1)}{k\,!}(x+1)^k$$

есть многочлен степени $s-1$. Свойства функции $\varphi(x)$ и равенство (2.1) не нарушатся, если мы видоизменим $\varphi(x)$ в точках a_i так, чтобы $\varphi(a_i+0)=\varphi(a_i)$, что мы будем предполагать. Далее очевидно

$$A_i=\varphi(a_i+0)-\varphi(a_i-0)\to 0 \qquad (i\to\infty)$$

и, если предположить, что функция $\varphi(x)$ имеет на открытом интервале $(-1,+1)$ хотя бы одну точку разрыва, то существует натуральное r, при котором

$$\varkappa=\max_x|\varphi(x+0)-\varphi(x-0)|(1-x^2)^{s/2}=$$
$$=\max_i|A_i|(1-a_i^2)^{s/2}=|A_r|(1-a_r^2)^{s/2}.$$

Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и подберем $m > r$ так, чтобы $|A_i| < \varepsilon$ ($i = m+1, m+2, \ldots$).

Введем в рассмотрение элементарные функции скачков $\sigma_a(t)$, определяемые равенствами $\sigma_a(t) = 1$ ($t \geq a$) и $\sigma_a(t) = 0$ ($t < a$) и заметим, что

$$(2.2)\qquad \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{s-1} \sigma_a(t)\, dt = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^s}{\Gamma(s+1)} & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases} = \frac{|x-a|^s + (x-a)^s}{2\,\Gamma(s+1)}$$

(s нечетное).

Положим

$$(2.3)\qquad \varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i \sigma_{a_i}(t) + r(t) = g(t) + r(t).$$

Колебание функции $r(t)$ в любой точке сегмента $-1 \leq t \leq 1$, очевидно, не превышает ε и поэтому можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех значений t' и t'' из сегмента $-1 \leq t \leq 1$, выполняется $|r(t') - r(t'')| < 2\varepsilon$.

Таким образом, модуль колебания

$$\omega(h) = \sup |r(t') - r(t'')| \qquad (|t' - t''| \leq h, \ -1 \leq t' < t'' \leq 1)$$

функции $r(t)$ подчиняется при $h < \delta$ неравенству $\omega(h) < 2\varepsilon$ и, на основании неравенства Джэксона,

$$(2.4)\qquad E_n(r) < c\,\omega\left(\frac{2}{n}\right) < 2\varepsilon c$$

при $n\delta > 2$, где c абсолютная константа.

Вследствие (2. 1), (2. 2) и (2. 3) функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\,s!} \sum_{i=1}^{m} A_i |x - a_i|^s + R(x) + Q_s(x),$$

где $Q_s(x)$ есть некоторый многочлен степени s, а $R(x)$ — функция, полученная путем s-кратного интегрирования функции $r(x)$. Если $n - s > 2/\delta$, то на основании (2. 4) существует многочлен $P_{n-s}(x)$ степени $n-s$, для которого имеет место

$$|r(x) - P_{n-s}(x)| < 2\varepsilon c.$$

Поэтому, если $P_n(x)$ есть s-кратный интеграл от $P_{n-s}(x)$, то, используя неравенство Джэксона, получим

$$(2.5)\qquad E_n(R) = E_n(R - P_n) < \frac{\varepsilon c_1}{n^s} \qquad (n > N)$$

при достаточно большом N, где c_1 постоянная.

С другой стороны, на основании асимптотического равенства (1. 3) С. Н. Бернштейна для функции

$$(2.6)\qquad g(x) = \frac{1}{2\,s!} \sum_{i=1}^{m} A_i |x - a_i|^s$$

имеет место

$$(2.7)\qquad (1-\varepsilon) \frac{\varkappa\,\mu(s)}{2\,s!\,n^s} < E_n(g) < (1+\varepsilon) \frac{\varkappa\,\mu(s)}{2\,s!\,n^s} \qquad (n > N)$$

где N достаточно велико.

Теперь утверждение теоремы 1 следует из (2. 5), (2. 6) и (2. 7), приняв во внимание, что при $n \geqq s$

$$E_n(f) = E_n(g + R), \quad | E_n(g + R) - E_n(g) | \leqq E_n(R).$$

При s четном правая часть (2. 2) заменяется выражением

$$\frac{(x-a)\,|\,x-a\,|^{s-1} + (x-a)^s}{2\,\Gamma(s+1)},$$

чем и об'ясняется, что асимптотическое выражение $f(x)$ в этом случае связано с константой

$$\nu(s) = \lim_{n \to \infty} n^s E_n(x\,|\,x\,|^{s-1}),$$

§ 3.

Если $f(x)$ есть суммируемая на интервале $(-1,+1)$ функция, то обозначим через

$$E_n(f)_L = \min_{P_n} \int_{-1}^{+1} | f(x) - P_n(x) |\, dx,$$

где минимум распространен на всевозможные многочлены P_n степени n.

Теорема 2. *Пусть s — нечетное число и функция $f(x)$ имеет на сегменте $-1 \leqq x \leqq 1$ абсолютно непрерывную производную порядка $s-1$, которая в свою очередь является неопределенным интегралом от функции $\varphi(x) = f^{(s)}(x)$, обладающей следующими свойствами:* 1) *$\varphi(x)$ имеет ограниченную вариацию на сегменте $-1 \leqq x \leqq 1$ и разлагается в виде суммы $\varphi(x) = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ есть функция скачков, а $h(x)$ — абсолютно непрерывная функция;* 2) *$\varphi(x)$ фактически имеет хотя бы один разрыв в интервале $-1 < x < 1$. Тогда*

$$E_n(f)_L \approx \frac{1}{n^{s+1}} \frac{M_s}{2\,s\,!} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_k^2)^{\frac{s+1}{2}}\, | A_k | \qquad (n \to \infty),$$

где $a_1, a_2, \ldots\ldots$ точки в которых $\varphi(x)$ имеет существенные разрывы со скачками

$$A_k = \varphi(a_k + 0) - \varphi(a_k - 0) \neq 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

и

$$M_s = s\,! \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\,\nu + 1)^{s+2}}.$$

Доказательство теоремы 2 базируется на следующей лемме, доказанной в моей статье [10] (см. равенство (5. 37)).

Лемма 1.[3]) *Если s нечетное, $-1 < a_1 < a_2 < \ldots . < a_m < 1$,*

[3]) Фактически мы сформулировали частный случай доказанной в [10] леммы, т. к. там предполагается s произвольным, но не четным, удовлетворяющим неравенству $s > -1$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m} A_k\,|x-a_k|^s,$$

то

$$E_n(f)_L \approx \frac{M_s}{n^{s+1}} \sum_{k=1}^{m} |A_k|(1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}} \qquad (n\to\infty). \tag{3.1}$$

Докажем еще вторую лемму

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $(-1,+1)$, то имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_L \leqq \frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{var} f}{n},$$

в котором константа в правой части не может быть уменьшена.

Доказательство. Пусть H обозначает класс функций $\varphi(\vartheta)$ периода 2π с вариацией на периоде не превышающей единицу. Для каждой такой функции (см. [7]) можно подобрать тригонометрический полином $T_{n+1}(\vartheta)$ порядка $n-1$, для которого

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(\vartheta)-T_{n-1}(\vartheta)|\,d\vartheta \leqq \frac{\pi}{2n}.$$

Причем $T_{n-1}(\vartheta)$ четный полином, если $\varphi(\vartheta)$ четная функция. Если теперь $f(x)$ функция ограниченной вариации на отрезке $(-1,+1)$ с вариацией не превышающей единицу, то $f(\cos\vartheta)$ имеет на отрезке $(0,2\pi)$ вариацию не превышающую 2.

Поэтому существует полином $T_{n-1}(\vartheta)$ такой, что

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |f(\cos\vartheta)-T_{n-1}(\vartheta)|\,d\vartheta \leqq \frac{\pi}{2n}.$$

Отсюда

$$E_{n-1}(f) \leqq \int_{-1}^{+1} |f(x)-T_{n-1}(\arccos x)|\,dx \leqq \int_0^{\pi} |f(\cos\vartheta)-T_{n-1}(\vartheta)|\,d\vartheta \leqq \frac{\pi}{2n}.$$

Вторая часть утверждения вытекает из того обстоятельства, что для функции $\varphi(x)=\operatorname{sgn}(x)$

$$E_{n-1}(\varphi)_L = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n},$$

как показывают несложные рассуждения, на которых мы останавливаться не будем.

Доказательство теоремы 2. Функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы, можно представить в виде

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}\varphi(t)\,dt+P_{s-1}(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}g(t)\,dt+H(x)+P_{s-1}(x)=g(x)+H(x)+P_{s-1}(x),$$

где $P_{s-1}(x)$ — многочлен степени $s-1$, а $H(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка s. При этом, не изменяя этих равенств, функции φ и g можно видоизменить на счетном множестве точек так, чтобы они были непрерывными справа для $-1<x<1$.

Покажем, что

$$E_n(H)_L = O(n^{-s-1}) \qquad (n \to \infty). \tag{3.2}$$

В самом деле, если $F(x)$ — абсолютно непрерывная функция, то она есть неопределенный интеграл от $F'(x)$. Существует последовательность многочленов $P_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ таких, что

$$\int_{-1}^{+1} |F'(x)-P_n(x)|\,dx = \varepsilon_n \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Если поэтому $Q'_{n+1}(x)=P_n(x)$, то в силу леммы 1,

$$E_{n+1}(F)_L = E_{n+1}(F-Q_{n+1})_L \leqq \frac{\pi}{2}\,\frac{\varepsilon_n}{n+1} = o(n^{-1})$$

и мы доказали (3.2) при $s=0$. При произвольном целом эти обычные рассуждения надо повторить по индукции.

Функция скачков равна $g(x)=\sum A_k\sigma_{a_k}(x)$, где $\sigma_a(x)=1$ для $x\geqq a$ и $\sigma_a(x)=0$ для $x<a$, и так как

$$\sum_k |A_k| < \infty \tag{3.3}$$

и имеет место (2.2), то $G(x)=A(x)+P_s(x)$, где

$$A(x)=\frac{1}{2\,s\,!}\sum_k A_k\,|x-a_k|^s$$

а $P_s(x)$ есть многочлен степени s.

Наша теорема будет доказана, если будет установлено асимптотическое равенство

$$E_n(A)_L \approx \frac{1}{n^{s+1}}\,\frac{M}{2\,s\,!}\sum_{k=1}^{\infty}(1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}}\,|A_k|. \tag{3.4}$$

Обозначая через $E_n(f;c,d)$ наилучшее приближение в среднем функции f на сегменте $[c,d]$, будем иметь

$$E_n(|x-a|^s)_L \leqq E_n(|x-a|^s;\,a-2,\,a+2)_L = E_n(|x|^s,-2,2) =$$
$$= 2^{s+1}E_n(|x|^s)_L < \frac{c}{n^{s+1}},$$

где c константа. Последнее неравенство вытекает из леммы 1.

Зададим теперь $\varepsilon>0$ и подберем m так, чтобы

$$\sum_{m+1}^{\infty}|A_k| < \varepsilon$$

и положим

$$A(x)=\sum_{k=1}^{m}A_k\,|x-a_k|^s+\sum_{k=m+1}^{\infty}A_k\,|x-a_k|^s = A_1(x)+A_2(x).$$

Тогда при достаточно больших n

$$E_n(A_2)_L \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k| E_n(|x-a_k|^s)_L < \frac{\varepsilon c}{n^{s+1}}.$$

С другой стороны, на основании леммы 2

$$E_n(A_1)_L \approx \frac{1}{n^{s+1}} \frac{M_s}{2s!} \sum_{k=1}^{m} (1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}} |A_k| \qquad (n \to \infty).$$

Оба эти соотношения влекут (3.4), если иметь в виду (3.1) и неравенство

$$|E_n(A)_L - E_n(A_1)_L| \leq E_n(A_2)_L.$$

§ 4.

Пусть W_{s-1} обозначает класс функций f, имеющих на $(-1,+1)$ абсолютно непрерывную производную $f^{s-2}(x)$ порядка $s-2$ и производную $f^{(s-1)}(x) = \varphi(x)$ порядка $s-1$ с ограниченной вариацией, удовлетворяющей неравенству

$$\|\varphi\|_v = \operatorname*{var}_{-1 \leq x \leq 1} \varphi(x) \leq 1.$$

При этом при $s=1$ считаем, что W_0 есть класс функций $f(x) = \varphi(x)$ ограниченной вариации, удовлетворяющих неравенству (4. 1).

Положим

$$E_n(\mathfrak{M})_L = \sup_{f \varepsilon \mathfrak{M}} E_n(f)_L$$

где верхняя грань распространена на множество $\mathfrak{M}$ функций.

Теорема 3. *Справедливы равенства: при* $s = 2, 4, \ldots$

(4. 1)
$$E_n(W_{s-1})_L = \frac{1}{2(s-1)!} \max_{-1 \leq a \leq 1} E_n(|a-x|^{s-1})_L \approx$$
$$\approx \frac{1}{2(s-1)!} E_n(|x|^{s-1})_L \approx \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{s+1}} \frac{1}{n^s} \qquad (n \to \infty);$$

при $s = 1, 3, 5, \ldots$

(4. 2)
$$E_n(W_{s-1})_L = \frac{1}{2(s-1)!} \max_{-1 \leq a \leq 1} E_n((a-x)|a-x|^{s-2})_L \approx$$
$$\approx \frac{1}{2(s-1)!} E_n(x|x|^{s-2})_L \approx \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{s+1}} \frac{1}{n^s} \qquad (n \to \infty).$$

Теорема 4. *Пусть*

(4. 3)
$$P_n^{(s)}(x, a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(s)}(a) x^k$$

есть многочлен степени n, *наилучший в среднем на отрезке* $(-1,1)$ *для функции* $|a-x|^{s-1}$ *при* s *четном и для функции* $(a-x)|a-x|^{s-1}$ *при* s *нечетном.*

Тогда линейный метод

$$U_n(f, x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k + \frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1}(x-t)^{s-1}\,d\varphi(t) + U_n^*(f, x),$$

(4. 4)

$$U_n^*(f, x) = \frac{1}{2(s-1)!}\sum_{k=0}^{n} x^k \int_{-1}^{+1} \alpha_k^{(s)}(t)\,d\varphi(t) \qquad (\varphi(t) = f^{(s-1)}(t))$$

приближения функции f многочленами степени n есть (точно) наилучший для класса W_{s-1}. Иначе говоря

$$\sup_{f\in W_{s-1}} \int_{-1}^{+1} |f(x) - U_n(f, x)|\,dx = E_n(W_{s-1})_L.$$

Доказательство при s четном. Если $f \in W_{s-1}$, то, обозначая через $P_m(x)$ некоторий многочлен степени m, будем иметь $(f^{(s-1)}(x) = \varphi(x)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k + \frac{1}{(s-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}\,d\varphi(t) =$$

$$= P_{s-1}(x) + \frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1} |x-t|^{s-1}\,d\varphi(t) = P_{s-1}(x) + f_*(x).$$

где многочлен $P_{s-1}(x)$ определяется равенством

$$P_{s-1}(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k + \frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1}(x-t)^{s-1}\,d\varphi(t).$$

Нам предстоит аппроксимировать насколько возможно хорошо функции $f_*(x)$, соответствующие функциям φ, у которых $\|\varphi\|_v \leqq 1$.

Мы их будем приближать многочленами вида $U_n^*(f, x)$, где функции $\alpha_k^{(s)}(t)$ будут далее определены. Обозначая через $g(x)$ произвольную измеримую функцию, не превышающую по абсолютной величине единицу, получим

$$\sup_{\varphi} \int_{-1}^{+1} |f_*(x) - U_n^*(f, x)|\,dx =$$

$$\sup_{\varphi} \frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1}\left|\int_{-1}^{+1}\left[|x-t|^{s-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k^{(s)}(t)\right] d\varphi(t)\right| dx =$$

$$= \sup_{\varphi}\sup_{g}\int_{-1}^{+1} g(x)\int_{-1}^{+1}\left[|x-t|^{s-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k^{(s)}(t)\right] d\varphi(t)\,dx =$$

$$= \sup_{g}\sup_{\varphi}\int_{-1}^{+1}\left(\int_{-1}^{+1}\left[|x-t|^{s-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k^{(s)}(t)\right] g(x)\,dx\right) d\varphi(t) =$$

$$= \sup_{g}\sup_{t}\left|\int_{-1}^{+1}\left[|x-t|^{s-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k^{(s)}(t)\right] g(x)\,dx\right| = \max_{t}\sup_{g} =$$

$$= \max_{t}\int_{-1}^{+1}\left||x-t|^{s-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k^{(s)}(t)\right| dx \geqq E_n(|x-t_*|^{s-1})_L,$$

где $E_n(|x-t_*|^{s-1})_L = \max_t E_n(|x-t|^{s-1})_L$.

При этом последнее неравенство обращается в равенство, если функции $\alpha_k^{(s)}(t)$ подобраны так, чтобы многочлен $P_n^{(s)}(x, a)$, определяемый при помощи (4.3), был наилучшим в среднем для функции $|x-a|^{s-1}$, т. е. чтобы для любого полинома $P_n(x)$ степени n

$$\int_{-1}^{+1} \left| |x-a|^{s-1} - P_n(x) \right| dx \geq \int_{-1}^{+1} \left| |x-a|^{s-1} - P_n^{(s)}(x, a) \right| dx.$$

Из наших рассуждений следует, что если $f \in W_{s-1}$, то

$$E_n(f)_L \leq E_n(|t_*-x|^{s-1})_L.$$

С другой стороны, положим

$$\varphi_*(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_* \ (t = t_*, \text{ если } t_* = -1) \\ 1 & \text{при } t \geq t_* \ (t > t_*, \text{ если } t_* = -1), \end{cases}$$

$$f_*(x) = \int_{-1}^{+1} |x-t|^{s-1} d\varphi_*(t) = |x-t_*|^{s-1}.$$

Очевидно $f_* \in W_{s-1}$ и для $f = f_*$ неравенства обращается в равенство. Этим доказана первая строка равенства (4.1) и теорема 4.

Перейдем теперь к доказательству остальных (асимптотических) равенств (4.1).

В моей работе [9] (см. теорему 1, равенства (3.1) и (3.2)) показано, что при s четном

$$E_n(|a-x|^{s-1})_L = \frac{M_{s-1}(1-a^2)^{s/2}}{n^s} + O\left(\frac{\log n}{n^{s+1}}\right), \tag{4.5}$$

$$M_{s-1} = (s-1)!\,\frac{8}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{s+1}} \tag{4.6}$$

равномерно относительно a, уговлетворяющих неравенству $|a| \leq \eta \leq 1$.

Отсюда

$$\max_{|a| \leq \eta} E_n(|a-x|^{s-1})_L = \frac{M_{s-1}}{n^s} + O\left(\frac{\log n}{n^{s+1}}\right). \tag{4.7}$$

С другой стороны, положим

$$\eta < a \leq 1, \quad k = \frac{1+2a-\eta}{1+\eta}, \quad \mu = \frac{2}{1+k};$$

тогда

$$\frac{1+\eta}{1-\eta} = \frac{1+a}{k-a}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1+a}{1+\eta} \leq \frac{2}{1+\eta}, \quad k > 1$$

и, таким образом, точка μa делит отрезок $(-\mu, \mu k)$ длины 2 в том же отношении, в каком η делит отрезок $(-1, +1)$. Поэтому, обозначив через $E_n(f; a, b)_L$ наилучшее приближение f на отрезке (a, b), получим

$$E_n(|a-x|^{s-1})_L = E_n(|a-x|^{s-1}; -1, +1)_L \leq$$
$$\leq E_n(|a-x|^{s-1}; -1, k)_L = \frac{1}{\mu^{s-1}} E_n(|\mu a - \mu x|^{s-1}; -1, k)_L =$$
$$= \frac{1}{\mu^s} E_n(|\mu a - y|^{s-1}; -\mu, \mu k)_L = \frac{1}{\mu^s} E_n(|\eta - x|^{s-1})_L =$$
$$= \frac{2^s}{(1+\eta)^s} E_n(|\eta - x|^{s-1})_L \qquad (\eta < a \leq 1)$$

и в силу (4.5)

$$(4.8) \quad \underset{\eta \leq a \leq 1}{E_n} (|a-x|^{s-1})_L \leq H(\eta) \frac{M_{s-1}}{n^s} + O\left(\frac{\log n}{n^{s+1}}\right), \qquad H(\eta) = \frac{2^s(1-\eta^2)^{s/2}}{(1+\eta)^s}.$$

Легко видеть, что существует такое $\eta = \eta_0$ $(0 \leq \eta_0 < 1)$, что $H(\eta_0) = 1$; далее, очевидно, неравенство (4.8) сохраняется при $\eta < |a| \leq 1$. Если теперь в (4.7) и (4.8) положить $\eta = \eta_0$, то получим утверждение, содержащееся во второй строке равенства (4.1).

Теоремы 3 и 4 доказаны.

Сделаем еще несколько замечаний.

Мы доказали, что максимум $E_n(|x-a|^{s-1})_L$ на сегменте $(-1, +1)$ достигается асимптотически при $a=0$. Для фиксированного n это неверно; например, вычисления показывают, что

$$E_2(|x|)_L = 0{,}118\ldots, \text{ а } E_2\left(\left|x - \frac{1}{2}\right|\right)_L = 0{,}164\ldots.$$

Доказательство при s нечетном проводится аналогично. Нужно принять во внимание, что в этом случае если $f \in W_{s-1}$ и $f^{(s-1)}(x) = \varphi(x)$, то

$$f(x) = \frac{1}{2(s-1)!} \int_{-1}^{+1} |x-t|^{s-2}(x-t)\varphi(t)\,dt + P_{s-1}(x)$$

и при $n \to \infty$

$$\max_{-1 \leq a \leq 1} E_n((x-a)|x-a|^{s-2})_L \approx E_n(x|x|^{s-2})_L,$$

причем при n нечетном

$$E_n(x|x|^{s-2})_L = \left| \int_{-1}^{+1} x|x|^{s-2} \operatorname{sign} \sin n \arccos x\, dx \right| \approx$$
$$\approx (s-1)!\, \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{s+1}} \frac{1}{n^s} \qquad (n \to \infty).$$

Функции $|x|^{s-1}/2(s-1)!$ при s четном и $x|x|^{s-2}/2(s-1)!$ при s нечетном (не зависящие от n) принадлежат к W_{s-1} и следовательно правые части равенств (4.1) и (4.2) для них достижимы.

Можно было бы рассматривать вместо W_{s-1} класс $\overline{W}_s$ функций, имеющих производную $f^{(s)}(x)$, удовлетворяющую неравенству,

$$\|f^{(s)}\|_L = \int_{-1}^{+1} |f^{(s)}(x)|\, dx \leq 1.$$

Нетрудно установить, что тогда $E_n(W_{s-1})_L = E_n(\overline{W}_s)_L$, хотя для каждой отдельной функции $f \in \overline{W}_s$

$$E_n(f)_L \approx o(n^{-s}) \qquad (n \to \infty).$$

Наконец, если через W_s^* обозначить класс функций периода 2π, имеющих производную $f^{(s)}$ порядка s, удовлетворяющую неравенству

$$\int_0^{2\pi} |f^{(s)}(x)|\, dx \leqq 1,$$

то сопоставляя доказанные теоремы с другим, полученным мною результатом ([7] § 7, п. 2), получим

$$\sup_{f \in W_s^*} E_n^*(f)_L \approx E_n(\overline{W}_s)_L,$$

где $E_n^*(f)_L$ есть наилучшее приближение функции посредством тригонометрических полиномов порядка n.

Цитированная литература. [4])

Н. И. Ахиезер—М. Г. Крейн

[1] О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, *ДАН*, **15** (1937), стр. 107—112.

С. Н. Бернштейн

[2] Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation de $|x|$, *Acta Math.*, **37** (1913), p. 1—57.

[3] О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени, *ИАН* (1938), стр. 169—180.

[4] О наилучшем приближении $|x-c|^p$, *ДАН*, **18** (1938), стр. 379—384.

J. Favard

[5] Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, *Bulletin des Sciences Math.*, **61** (1937), p. 209-224.

B. Sz.-Nagy

[6] Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, *Berichte der Sächsischen Akad. der Wissenschaften zu Leipzig*, **90** (1938), S. 103—134; **91** (1939), S. 3—24.

С. М. Никольский

[7] Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, *ИАН*, **10** (1946), стр. 207—256.

[8] О наилучшем приближение функций, s-ая производная которой имеет разрывы первого рода, *ДАН*, **55** (1947), стр. 99—102.

[4]) *ДАН = Доклады Академии Наук СССР; ИАН = Известия Академии Наук СССР*, сер. мат.

[9] О наилучшем приближении многочленами в среднем функций с особенностями вида $|a-x|^s$, *ДАН*, **55** (1947), стр. 195—198.

[10] О наилучшем приближении многочленами в среднем функции $|a-x|^s$, *ИАН*, **11** (1917), стр. 139—180.

[11] Наилучшее приближение в среднем одного класса функций любыми полиномами, *ДАН*, **58** (1947), стр. 25—28.

[12] О наилучшем линейном методе приближения многочленами в среднем дифференцируемых функций, *ДАН*, **58** (1917), стр. 185—187.

Математический Институт
им. В. А. Стеклова АН СССР.

(Поступило 9/XI 1949 г.)